CONCOURS D'ADMISSION A L'E.S.M. DE SAINT-CYR EN 1986

CONCOURS SCIENCES

MATHEMATIQUES I

EPREUVE COMMUNE AUX DIFFERENTES OPTIONS *Durée : 4 heures*

– I –

On désigne par E_n l'espace vectoriel des polynômes à une indéterminée X, à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à n.

Δ est l'application de E_n dans lui-même qui associe au polynôme P le polynôme ΔP défini par :

$$\Delta P(X) = P(X+1) - P(X) .$$

1) Montrer que Δ est un endomorphisme de E_n. Préciser son noyau et son image.

2) Montrer que pour tout polynôme P, à coefficients réels, il existe un et un seul polynôme Q tel que :

$$P(X) = Q(X+1) - Q(X) \qquad \text{et} \qquad Q(0) = 0 .$$

Préciser le degré de Q en fonction de celui de P.

Évaluer, à l'aide de Q, la quantité : $\sum_{k=0}^{N-1} P(k)$.

3) Simplifier :

$$\sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)^3 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{N-1} (2k+1)^4 .$$

– II –

Dans cette partie, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^2, c'est-à-dire possédant une dérivée première f' et une dérivée seconde f'' continues sur $[0,1]$.

1) Préciser la limite, lorsque l'entier n tend vers $+\infty$, de :

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) .$$

2) Montrer que pour $n \geqslant 1$ et $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, il existe des réels $\xi_{n,k} \in \left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\right]$ tels que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + \frac{1}{24\,n^3} \sum_{k=0}^{n-1} f''\left(\xi_{n,k}\right) .$$

On pourra utiliser, à un ordre convenable et au voisinage de $\frac{2k+1}{2n}$, la formule de Taylor-Lagrange ou la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction f.

Tournez la page S. V. P.

3) En déduire, en fonction de $f'(0)$ et de $f'(1)$, la limite λ, si n tend vers $+\infty$, de :

$$n^2\left[\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)\right].$$

4) Pour $f(x) = x^3$, calculer λ, et donner la valeur de :

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \frac{\lambda}{n^2} .$$

5) Pour $f(x) = x^4$, calculer λ, et donner la valeur de :

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \frac{\lambda}{n^2} .$$

6) Pour $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)$, calculer λ, simplifier $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right)$ et donner la partie principale, quand n tend vers $+\infty$, de :

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \frac{\lambda}{n^2} .$$

– III –

E_2 est l'espace vectoriel défini à la partie I, pour $n = 2$.

1) Montrer que les applications φ_1 , φ_2 , φ_3 de E_2 dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\varphi_1(P) = P'(\alpha), \quad \varphi_2(P) = P'(\beta), \quad \varphi_3(P) = P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

α , β étant des réels distincts, sont des formes linéaires sur E_2 , qui forment une base de l'espace vectoriel des formes linéaires définies sur E_2 .

2) Déterminer la base (P_1 , P_2 , P_3) duale de la base précédente, c'est-à-dire telle que :

$$\varphi_i(P_j) = \delta_{ij} \qquad \text{avec} \quad \delta_{ij} = 0 \qquad \text{si} \quad i \neq j \qquad \text{et} \quad \delta_{ii} = 1 .$$

3) En déduire qu'il existe un polynôme et un seul P, de degré inférieur ou égal à 2, tel que, a, b, c étant trois réels donnés :

$$P'(\alpha) = a, \quad P'(\beta) = b \qquad \text{et} \quad P\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) = c .$$

Écrire ce polynôme P .

Tournez la page S. V. P.

– IV –

1) Soit I un segment de IR, et φ une fonction numérique continue sur I. Soient n réels positifs $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ et n points de I : $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Montrer qu'il existe un point c dans I tel que :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi(a_i) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \right) \varphi(c) .$$

2) Soit $f : [-a, a] \longrightarrow$ IR supposée de classe C^4, c'est-à-dire que sa dérivée quatrième, notée f^{IV}, existe et est continue sur $[-a, a]$, a désignant un réel strictement positif.

Écrire le polynôme P de degré inférieur ou égal à 2 tel que :

$$P'(a) = f'(a) ; \quad P'(-a) = f'(-a) ; \quad P(0) = f(0) .$$

Calculer : $\displaystyle\int_{-a}^{a} P(x)\,dx$ en fonction de $f(0)$, $f'(a)$, $f'(-a)$.

3) Montrer qu'il existe $\xi \in [-a, a]$ tel que :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2a\,f(0) + \frac{a^2}{6}\left(f'(a) - f'(-a)\right) - \frac{7}{180}\,a^5\,f^{IV}(\xi) .$$

On utilisera la fonction auxiliaire définie sur $[0, a]$ par :

$$\Psi(h) = \int_{-h}^{h} f(x)\,dx - 2h\,f(0) - \frac{h^2}{6}\left(f'(h) - f'(-h)\right) + \frac{7}{180}\,h^5\,A ,$$

où A désigne le réel tel que $\Psi(a) = 0$.

4) On suppose dorénavant que f est de classe C^4 sur $[0, 1]$. Montrer qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que :

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) + \frac{1}{24\,n^2}\left(f'(1) - f'(0)\right) - \frac{7\,f^{IV}(c)}{5760\,n^4} .$$

5) Retrouver les résultats des questions II.4 et II.5.

6) Quelle est la limite, si n tend vers $+\infty$, de :

$$n^4\left[\int_0^1 f(x)\,dx - \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{2k+1}{2n}\right) - \frac{1}{24\,n^2}\left(f'(1) - f'(0)\right)\right] .$$

Retrouver le résultat de II.6.

7) Remarquant que $\ln 2 = \displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$, calculer $\ln 2$ à 10^{-5} près.

8) Écrire la dérivée d'ordre n de la fonction qui à x, associe $\dfrac{1}{1+x^2}$.

En remarquant que $\pi = 4\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, calculer π à 10^{-4} près.